ΜΕΜ-253: Αριθμητική Επίλυση Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων
Μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων για ένα πρόβλημα δυο σημείων

Διατύπωση του προβλήματος

Αναζητάμε συνάρτηση $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ η οποία να είναι λύση του προβλήματος δυο σημείων

$$-u''(x) + u(x) = f(x), \qquad \forall\, x \in [a, b], \tag{1}$$
$$u(a) = u(b) = 0, \tag{2}$$

όπου $f : [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ γνωστή συνάρτηση. Επίσης, οι πραγματικοί αριθμοί a, b με $a < b$ και ο $u_0 \in \mathbb{R}$, είναι δοσμένα.

Μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων

Δοσμένου ενός φυσικού αριθμού $N \geq 2$, θεωρούμε την ομοιόμορφη διαμέριση του $[a, b]$ με πλάτος $h = \frac{b-a}{N}$ με κόμβους τα σημεία $t^n = a + nh$, για $n = 0, \dots, N$. Ορίζουμε τον χώρο των πεπερασμένων στοιχείων ως

$$S_h := \left\{ \chi \in \mathcal{C}([a, b]) \,:\, \chi(a) = \chi(b) = 0 \quad \text{και} \quad \chi|_{[x_j, x_{j+1}]} \in \mathbb{P}_1, \quad \text{για} \quad j = 0, \dots, N-1 \right\},$$

του οποίου η διάσταση είναι $N - 1$. Έστω $\{\phi_j\}_{j=1}^{N-1}$ μια βάση του S_h, τότε η ζητούμενη προσέγγιση των πεπερασμένων στοιχείων $u_h \in S_h$ της u μπορεί να γραφεί σαν γραμμικός συνδυασμός της βάσης, δηλαδή

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^{N-1} \alpha_j \phi_j(x),$$

και προσδιορίζεται από

$$\int_a^n u_h'(x)\phi'(x)\, dx + \int_a^b u_h(x)\phi(x)\, dx = \int_a^b f(x)\phi(x)\, dx, \quad \forall\, \phi \in S_h.$$

Συνεπώς, οι συντελεστές $\{\alpha_j\}_{j=1}^{N_1}$ προσδιορίζονται από την λύση του γραμμικού συστήματος

$$\sum_{j=1}^{N-1} \left(\int_a^b \phi_j'(x)\phi_i'(x)\, dx + \int_a^b \phi_j(x)\phi_i(x)\, dx \right) = \int_a^b f(x)\phi_i(x)\, dx, \quad i = 1, \dots, N-1. \tag{3}$$

Θεωρούμε τους πίνακες $\mathcal{M}$, $\mathcal{S} \in \mathbb{R}^{N-1,N-1}$ με στοιχεία $\{m_{ij}\}$ και $\{s_{ij}\}$, αντίστοιχα για $i, j = 1, \dots, N-1$, τα οποία δίδονται από τις

$$m_{ij} = \int_a^b \phi_j(x)\phi_i(x)\, dx, \qquad i, j = 1, \dots, N-1,$$
$$s_{ij} = \int_a^b \phi_j'(x)\phi_i'(x)\, dx, \qquad i, j = 1, \dots, N-1.$$

Επίσης, ορίζουμε το σταθερό διάνυσμα $b \in \mathbb{R}^{N-1}$ με στοιχεία b_i, $i = 1, \dots, N-1$, τα οποία δίδονται από

$$b_i = \int_a^b f(x)\phi_i(x)\, dx, \quad i = 1, \dots, N-1.$$

Επιλέγοντας την συνήθη βάση του S_h, η οποία αποτελείται από τις συναρτήσεις

$$\phi_i(x) := \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{h}, & \text{αν} \quad x \in [x_{i-1}, x_i], \\ \frac{x_{i+1} - x}{h}, & \text{αν} \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \quad \forall\, x \in [a, b], \\ 0, & \text{διαφορετικά}, \end{cases}$$

παρατηρήστε ότι οι πίνακες $\mathcal{M}$ και $\mathcal{S}$ είναι τριδιαγώνιοι και τα στοιχεία τους δίδονται από

$$\begin{aligned} m_{ii} &= \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \phi_i(x)^2\,dx, && i = 1,\ldots,N-1,\\ m_{i,i+1} &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_{i+1}(x)\phi_i(x)\,dx, && i = 1,\ldots,N-2,\\ m_{i,i-1} &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi_{i-1}(x)\phi_i(x)\,dx, && i = 2,\ldots,N-1. \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} s_{ii} &= \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \phi_i'(x)^2\,dx, && i = 1,\ldots,N-1,\\ s_{i,i+1} &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_{i+1}'(x)\phi_i(x)\,dx, && i = 1,\ldots,N-2,\\ s_{i,i-1} &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi_{i-1}'(x)\phi_i'(x)\,dx, && i = 2,\ldots,N-1. \end{aligned}$$

Το σταθερό διάνυσμα δίδεται από

$$b_i = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)\phi_i(x)\,dx, \quad i = 1,\ldots,N-1.$$

Άσκηση 1

Προσδιορίστε τους πίνακες $\mathcal{M}$ και $\mathcal{S}$ ως προς την βάση που ορίστηκε παραπάνω.

Άσκηση 2

Γράψτε ένα πρόγραμμα το οποίο θα προσδιορίζει το διάνυσμα b για μια δοσμένη συνάρτηση f ως προς την παραπάνω βάση. Για την προσέγγιση του ολοκληρώματος εφαρμόστε τον κανόνα αριθμητικής ολοκλήρωσης του Simpson. Για μια συνάρτηση g και κάποιο $l \in \{1,\ldots,N-1\}$, το ολοκλήρωμα της μπορεί να προσεγγισθεί από

$$\begin{aligned} \int_{x_{l-1}}^{x_{l+1}} g(x)\,dx &= \int_{x_{l-1}}^{x_l} g(x)\,dx + \int_{x_l}^{x_{l+1}} g(x)\,dx\\ &\approx \frac{h}{6}\left[g(x_{l-1}) + 4g\left(\frac{x_{l-1}+x_l}{2}\right) + g(x_l)\right] + \frac{h}{6}\left[g(x_l) + 4g\left(\frac{x_l+x_{l+1}}{2}\right) + g(x_{l+1})\right], \end{aligned}$$

με $g(x) = f(x)\phi_l(x)$.

Άσκηση 3

Θεωρήστε το πρόβλημα δυο σημείων

$$-u''(x) + u(x) = \sin(2\pi x), \qquad \forall\, x \in [0,1], \tag{4}$$
$$u(a) = u(b) = 0, \tag{5}$$

του οποίου η λύση δίδεται από $u(x) = \frac{\sin(2\pi x)}{1+4\pi^2}$, $x \in [0,1]$. Γράψτε ένα πρόγραμμα το οποίο να υπολογίζει την προσέγγιση $u_h \in S_h$ της u, με την έννοια του προσδιορισμού των συντελεστών $\{\mathcal{I}_i\}_{i=1}^{N-1}$ ως προς την παραπάνω βάση. Παρατηρήστε από την (**??**) ότι οι παραπάνω συντελεστές αποτελούν λύση του γραμμικού συστήματος,

$$(\mathcal{S}+\mathcal{M})\mathcal{I} = b,$$

με $\mathcal{I} = (\mathcal{I}_1,\ldots,\mathcal{I}_{N-1})^T$. Για να ελέγξετε ότι έχετε υλοποιήσει σωστά τον αλγόριθμο, βρείτε το σφάλμα της προσέγγισης $\mathcal{E}(h)$ το οποίο δίδεται από

$$\mathcal{E}(h) := \|u - u_h\|_{L_2([a,b])} = \left(\int_a^b |u(x) - u_h(x)|^2\,dx\right)^{1/2}. \tag{6}$$

Υπολογίζοντας το σφάλμα (**??**) για δυο διαφορετικούς φυσικούς αριθμούς $N_1 < N_2$, υπολογίστε την πειραματική τάξη σύγκλισης της μεθόδου για τα N_1, N_2, η οποία ορίζεται ως

$$p(h_1,h_2) = \frac{\ln\left(\frac{\mathcal{E}(h_1)}{\mathcal{E}(h_2)}\right)}{\ln\left(\frac{h_1}{h_2}\right)}. \tag{7}$$

Καταλήξτε στο συμπέρασμα ότι $p(h_1,h_2) \approx 2$.

Αναμενόμενα σφάλματα

Επαληθεύστε τα σφάλματα για $h = [\frac{1}{100}, \frac{1}{200}, \frac{1}{400}]$

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(h_1) &= 8.47817053e - 06\\
\mathcal{E}(h_2) &= 2.11960424e - 06\\
\mathcal{E}(h_3) &= 5.29904919e - 07.
\end{aligned}$$

Για να υπολογιστεί το σφάλμα, θα πρέπει να γίνει αριθμητική ολοκλήρωση στο ολοκλήρωμα. Παρατηρήστε ότι πλέον σε κάθε υποδιάστημα $[x_i, x_{i+1}]$ η u_h μπορεί να γραφεί ως

$$u_h|_{[x_i,x_{i+1}]}(x) = \mathcal{U}_i \phi_i(x) + \mathcal{U}_{i+1} \phi_{i+1}(x).$$

Συνεπώς,

$$\|u - u_h\|^2_{L_2([a,b])} = \sum_{j=1}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} |u(x) - u_h(x)|^2 \, dx.$$

Για τον υπολογισμό των παραπάνω ολοκληρωμάτων μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα του μέσου, δηλαδή για μια συνάρτηση g,

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} g(x)\, dx \approx h\, g\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right),$$

με $g(x) = (u(x) - u_h(x))^2$.